Title	浮遊砂の粒度分布についての拡散モデル(「複合系における動力学の新展開」(追加),研究会報告)
Author(s)	遠藤, 徳孝
Citation	物性研究 (1995), 64(2): 129-131
Issue Date	1995-05-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/95543
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

研究会報告 「複合系における動力学の新展開」(追加)

浮遊砂の粒度分布についての拡散モデル

阪大理　　遠藤徳孝

(1995年4月21日受理)

河川や海にはいろいろな大きさの砂粒子が存在する。河や海の砂粒子が流れや波で運ばれると、その砂の粒度分布(粒径分布)が変わる。水理条件によって、砂の粒度分布は異なった特徴を持つ。そのため、河川、沿岸、深海など水理条件が異なる環境ではそれぞれ特徴的な粒度分布を持つことになる。

水理条件が粒度分布に影響を及ぼすというこうした理解は、地層から過去の環境、流速、波の強さなどを推定するのに重要で、地球科学における関心の一つである。ここでは、一方向の流れのもとで浮遊する砂の粒度分布を決定する、集団効果をより一般的にとりいれた微分方程式を提示する。

地学では、通常扱う砂粒子群の大きさは、オーダーにして3ケタ以上にわたるので、対数を取る。$\phi = -\log_2 D$ (Dはミリメーター)で定義し、これをファイスケールという。浮流する砂の粒度分布(重量比)はこのファイスケールでとると、正規分布になると信じられていた(Visher, 1969)。数学的に正規分布以外の分布(例えば、粒径をファイスケールでとったとき分布が双曲線となる(Barndorff-Nielsen, 1977)など)であるという考えもあるが、いずれにせよ、物理的な考えから始まったものではなく、観測結果に近い関数を見つけるといったものだった。しかし、水槽を用いた実験によると、流れによって浮遊した砂粒子群は一定の粒度分布を持たず、砂の供給源での粒度分布に依存する(遠藤他、1994; Endo et al. 1994)。

浮遊する砂の粒度分布を物理学的に予測しようという研究も実は古くからあった。パイオニア的な研究はRouse (1937), Einstein (1950) やHunt (1954) によるものであるが、その後、粒度分布を予測するという研究はあまりされなかった。おそらくは、取り扱っている系が整ったもので、自然現象に応用しにくいためであろう。

Rouse (1937) やHunt (1954) の研究は拡散モデルを用いているが、Einstein (1950) はこれとはかなり異なった切り口で、確率論的に考えている。(このH.A. Einsteinは相対論のA. Einsteinの息子である)。しかし、拡散モデルの方が分かり易く(理解しやすいというより、測定しやすい変数を使っている)、こちらのアプローチの方が普及している。

Rouse (1937) 以降の拡散モデルはみな、基本的には変わっていない。微分方程式はRouse (1937) とHunt (1954) とでは多少違うが、Mazumder (1994) の研究では別のファクターを入れたために、この二つの違いは無くなっている。Mazumder (1994) は、水中の粒子の濃度が高いと沈降速度が遅くなることを考慮に入れた。しかし後で述べるように、この考慮の仕方には中途半端な点がある。

(注) この報告は、「物性研究」Vol.63 No.5 (2月号) に掲載された研究会報告の追加掲載分です。

拡散係数の関数型がどういう形をとるかは、水の(流)速度分布の記述に関係する問題で、まだまだ考察する必要があると思われるが、今回はそれについては触れず、粒子の集団効果について考える。

Rouse (1937) の方程式は以下のようである。流れの乱れによって生じる小さな渦によって砂はかき混ぜられ、その結果、砂の拡散が生じる。水の底には砂が溜まっていて、底に近いほど浮遊砂の濃度は高いので、拡散の結果砂粒子は上向きに移動する。一方、重力によって砂は沈降するので、この二つの効果が釣り合えば平衡状態となる。式に表すと、c を砂の濃度として、

$$-\epsilon_s \frac{\partial c}{\partial y} - wc = 0 \tag{1}$$

となる。ここで、$\epsilon_s(y)$ は砂の拡散係数、wは沈降速度、yは垂直方向の上向きの位置の座標。
沈降速度は粒径によって違うので、c は粒径によって異なる。

Mazumder (1994) は濃度が高いと沈降速度が遅くなるという効果 (hinder settling effect) を拡散の式に入れた。Hinder settling effect は Maude & Whitmore (1958) の

$$w = w_o(1-c)^\alpha \tag{2}$$

を用いた。w_oは単一粒子の沈降速度。α は粒子のレイノルズ数に従って、2～5で変化する。よって、拡散の式は

$$-\epsilon_s \frac{\partial c}{\partial y} - w_o c(1-c)^\alpha = 0 \tag{3}$$

$\alpha = 1$ のときは Hunt (1954) と同じである。

Mazumder (1994) は濃度が高いと沈降速度が遅くなるという集団効果を考えたが、式 (3) は同じ粒径の粒子にしか使えない。そもそも、Rouse (1937) の式 (1) がひとつの粒径にしか適応できないし、Maude & Whitmore (1958) の式 (2) を導入する際にも注目している粒径の粒子の濃度の効果しか考えていない。しかし、異なった粒径の粒子が存在するとき、集団効果がそれぞれの粒径の粒子に対して独立に働くと考えるのはおかしい。そこで、全体の砂の濃度 C を Maude & Whitmore (1958) の式に用いて、

$$w = w_o(1-C)^\alpha \tag{4}$$

とし、拡散の式に代入すると、

$$-\epsilon_s \frac{\partial c_i}{\partial y} - w_{oi} c_i (1-C)^\alpha = 0 \tag{5}$$

となる。c_iは粒径にいくつか種類がある時の、第 i 番目の粒径を持つ粒子の濃度、w_{oi}は第 i 番目の粒径を持つ粒子の単一での沈降速度。Cは先ほども述べたように全濃度で、$\sum c_i$である。

$\epsilon_s(y)$ は粒径によらないとすると、

$$-\frac{(1-C)^\alpha}{\epsilon_s} = \frac{c_1'}{w_{o1}c_1} = \frac{c_2'}{w_{o2}c_2} = \cdots = \frac{c_i'}{w_{oi}c_i} \tag{6}$$

ゆえに $c_i \propto c_1^{w_{oi}/w_{o1}}$
よって、$C = \sum A_i c_i^{w_{oi}/w_{o1}}$　これを (5) に代入。

$$- \epsilon_s \frac{\partial c_1}{\partial y} - w_{o1} c_1 (1 - \sum A_i c_1^{w_{oi}/w_{o1}})^\alpha = 0 \tag{7}$$

A_iは第 i 番目の粒径を持つ粒子の存在確率（ただし c_1について１とした相対的な値である）で、境界条件として流れの底（河床）の値をとることにする。従って、浮遊砂の粒度分布は流れの底にある砂の粒度分布による。

粒径が連続的に変化するなら、$A(D)$ を直径 Dの粒子の確率密度とすると、粒径 D_oの砂粒子の濃度 $c_{D_o}(y)$ を決める方程式は

$$- \epsilon_s \frac{\partial c_{D_o}}{\partial y} - w_o(D_o)\, c_{D_o} \left(1 - \int A(D) c_{D_o}^{w_o(D)/w_o(D_o)} dD\right)^\alpha = 0 \tag{8}$$

上の式の中の積分は $A(D)$ がわかっていれば、c_{D_o}を定数として実行できる。それぞれの粒径について $c_D(y)$ を求めれば、それらの比から任意の高さの粒度分布がわかる。従って (8) の式が、一方向の流れのもとで浮遊する砂の粒度分布を決定する微分方程式である。

最後に、以下の問題点が残っている。今まで一般的な話をしてきたが、実際解くにあたっては、拡散係数$\epsilon_s(y)$ をどうとるかが重要である。普通は、砂は水の動きに敏感に対応するとして、砂の拡散係数は水の拡散係数に比例すると考えられている。水の拡散係数は流速分布や、剪断応力分布などによって決められるが、研究者によって意見が異なる。

拡散係数がわかったとしても、(8) の微分方程式を解くのは、$A(D) =$ 一定という場合（この場合は、(8) の式の積分は解析的にできる）でさえ大変困難である。

さらに別の問題がある。地球科学者が知りたいのは、過去の河川の状況である。地層で、浮遊砂が降り積もったと考えられるものが見つかると、それから浮遊砂の粒度分布がわかる。これをもとに、逆に拡散係数$\epsilon_s(y)$ を求めて過去の流れの状況を知りたい。しかし、地層から、$A(D)$ を知ることは通常、非常に困難である。従って、もっと少ないパラメーターで計算できるようにするか、あるいは別の方法で $A(D)$ を知ることが次の課題となる。

文献

遠藤徳孝・増田富士雄, 1994. 一つの輸送形態における粒度分布：浮遊での粒度の非選択性. 堆積学研究, 41. (印刷中)

Barndorff-Nielsen, O., 1977. Exponentially decreasing distribution for the logarithm of particle size. Proc. R. Soc. Lond., A, 353: 401-419.

Endo, N., Masuda, F. and Yokokawa, M., 1994. Grain size distribution of sediment carried by single transportation modes in an experimental microdelta system. (投稿中)

Maude, M. D. and Whitmore, R. L., 1958. A generalized theory of sedimentation. Br. J. Appl. Phys., 9, 477-482.

Mazumder, B. S., 1994. Grain size distribution in suspension from bed materials. Sedimentology, 41, 271-277.

Visher, G. S., 1969. Grain size distribution and depositional processes. J. Sediment. Petrol., 39: 1074-1106.